Gitarre und Exponentialfunktion

Ein fächerübergreifendes Thema
für die 10. Klasse
von
Norbert Roth, Alpen

Dass Norbert Roth mit Begeisterung Gitarre spielt, wird spätestens klar, wenn Sie den folgenden Artikel gelesen haben. Er besteht aus zwei Teilen, einem empirischen Teil, der ohne Musikkenntnisse machbar ist, und einem weiteren, der etwas mehr Musiktheorie voraussetzt. Am Ende des zweiten Teils wird deutlich, wie Theorie und Empirie zusammen fließen – wunderschön.

Norbert Roth hat in Freiburg Mathematik, Physik und Philosophie studiert, dann einige Jahre in Rumänien unterrichtet und arbeitet nun am Julius-Stursberg-Gymnasium in Neukirchen-Vluyn. Neben der Musik liegt sein Interesse bei der Anwendung von Mathematik im Unterricht, und das in vernünftigem Rahmen.

Immer schon wurde vermutet, dass Mathematiker eine Affinität zur Musik haben. Dass auch musikalisches Empfinden etwas mit mathematischer Gesetzmäßigkeit zu tun hat, kann man vielfach beobachten. Wir wollen uns die weit verbreitete Gitarre anschauen.

Die Gitarrensaiten sind zwischen dem *Sattel* am Hals der Gitarre und dem *Steg* am Korpus eingespannt. Auf dem Griffbrett sind Metallstäbe angebracht, die sogenannten *Bünde*, auf die man die Saiten niederdrückt, um dadurch unterschiedliche Tonhöhen zu erzeugen. Auch dem Musiklaien ist vielleicht schon aufgefallen, dass die Bundstäbchen auf dem Griffbrett einer Gitarre keine konstanten Abstände haben. Sie werden vom Sattel in Richtung des Steges immer kleiner. In der Nähe des Schallloches sind die Bundabstände nur noch ca. halb so groß wie in der Nähe des Sattels. Wenn man das Griffbrett über das Schallloch hinaus immer weiter verlängern würde, könnte man die Saiten irgendwann nicht mehr greifen. Wie würde es mit den Bundabständen weitergehen? Was wäre aber, wenn wir unendlich dünne Finger hätten ...?

Die Fragen:

Unterliegen die Bundabstände einer Gesetzmäßigkeit?
Wie würden sich die Bundabstände weiter verändern, wenn man das Griffbrett über das Schallloch hinaus bis zum Steg hin verlängern würde?
Wie viele Bünde könnte es dann theoretisch geben, wie viele Töne könnte man spielen?

Im Folgenden werde ich zwei Wege vorstellen, wie man sich dem Problem im Unterricht nähern kann. Der zweite Weg eignet sich als Vertiefung des ersten. Denkbar ist aber auch ein gleichzeitiges Arbeiten mit zwei Arbeitsgruppen.

Der *erste Weg* nähert sich dem Problem *empirisch-induktiv* und erweist sich als typisches Beispiel für den Dreiklang *Messen, mathematisches Modellieren, Anwenden*. Zur Lösung sind lediglich Grundbegriffe zur Exponentialfunktion notwendig: Zerfallsfaktor, Aufstellen einer Exponentialfunktion, asymptotisches Verhalten.

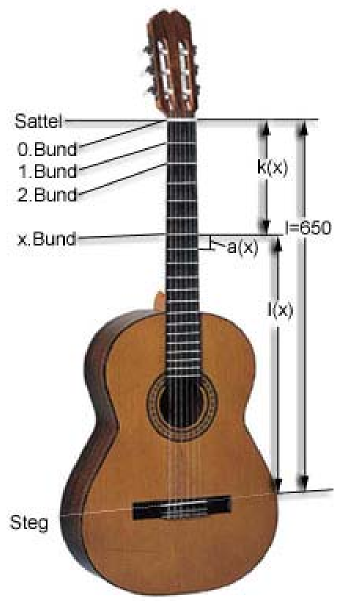
Der *zweite Weg* geht *deduktiv* vor. Dabei sind *fächerübergreifende* Aspekte aus der Physik (Akustik, 10. Klasse) und einfache Grundbegriffe aus der Musik (SI) heranzuziehen. Für eine Gitarre mit beliebig vorgegebener Saitenlänge können dann die Bundabstände bestimmt werden, was bis hin zum Selbstbau eines Demonstrationsmonochords führen kann. Lässt man die Schüler diesen Weg relativ selbständig beschreiten, so sollte er den besseren vorbehalten sein.

Für beide Wege benötigt man etwa eine Schulstunde, wenn als vorbereitende Hausaufgabe das Messen beim 1. Weg und das Recherchieren beim 2. Weg gegeben wird. Das Thema ist zu einem Projekt mit fast beliebigem Umfang ausbaubar.

Der erste Weg (empirisch-induktiv)

Wir möchten wissen, wie es über das Schallloch hinaus in Richtung des Steges mit den Bundabständen weitergeht. Damit ist die dreifache Schrittfolge der Bearbeitung vorgezeichnet. In einem ersten Schritt werden Bundabstände *gemessen*, um in einem zweiten Schritt den Sachverhalt mathematisch zu *modellieren*. Das Modell wird im dritten Schritt beim Schluss auf die imaginären Bundabstände in Richtung des Steges angewendet.

1. Messen



Für drei mögliche Messreihen kann man hoffen, Regelmäßigkeiten zu entdecken. Man kann erstens vom jeweiligen Bund x bis zum Sattel messen: das ist der Teil $k(x)$ der Saite, der nicht angeschlagen wird. Zweitens kann vom jeweiligen Bund x bis zum Steg gemessen werden: durch Niederdrücken der Saite auf das *x*-te Bundstäbchen wird die Gesamtlänge l_o der Saite auf die Länge $l(x)$ verkürzt, wodurch man beim Anschlagen einen höheren Ton erhält. Drittens können jeweils von Bund zu Bund die Bundabstände gemessen werden. Den einzelnen Bünden als Variablen werden die jeweiligen Messwerte zugeordnet. Es liegt nahe, mit der Zählung der Bünde am Sattel zu beginnen, weil nur hier ein eindeutiger Anfang gegeben ist. Der Sattel wäre dann der 0-te Bund.

Es werden folgende Größen eingeführt:

x	der x-te Bund
$k(x)$	Abstand des x-ten Bundes bis zum Sattel
$l(x)$	Abstand des x-ten Bundes bis zum Steg / Länge der schwingenden Saite
$a(x)$	Abstand des x-ten Bundes zum Nachfolgebund (x+1-ter Bund)
l_o	Länge der Saite

Bei einer klassischen Gitarre beträgt die Länge einer Gitarrensaite (Abstand Sattel-Steg) in der Regel $l_o =$ **650 mm**. Wenn diese Länge bekannt ist, reicht es aus, z.B. den Abstand $k(x)$ des jeweiligen Bundes bis zum Sattel zu messen. $l(x)$ und $a(x)$ können dann errechnet werden: $l(x) = 650 - k(x)$ bzw. $a(x) = k(x+1) - k(x)$

Bund x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$k(x)$ in *mm*	0	36,5	71,0	103,5	134,0	163,0	190,5	216,0	240,5
$l(x)$ in *mm*	650	613,5	579	546,5	516,0	487,0	459,5	434,0	409,5
$a(x)$ in *mm*	36,5	34,5	32,5	30,5	29,0	27,5	25,5	24,5	23,0

Bund x	9	10	11	12	13	14	15	16
$k(x)$ in *mm*	263,5	285,0	305,5	325,0	343,0	360,5	376,5	392,0
$l(x)$ in *mm*	386,5	365,0	344,5	325,0	307,0	289,5	273,5	258,0
$a(x)$ in *mm*	21,5	20,5	19,5	18,5	17,0	16,0	15,5	-

2. Auswerten / Modellieren

Auf der Suche nach Gesetzmöglichkeiten kann untersucht werden, ob aufeinanderfolgende Messwerte jeweils eine gleiche Beziehung aufweisen, z. B. ob sie äquidistant (linearer Zusammenhang) oder quotientengleich (exponentieller Zusammenhang) sind.

Für $k(x)$ sind aufeinanderfolgende Wertepaare weder äquidistant, noch quotientengleich. Es handelt sich also weder um eine lineare, noch um eine exponentielle Funktion.

Für $l(x)$ haben aufeinanderfolgende Werte annähernd gleiche Quotienten ($\frac{l(x+1)}{l(x)} \approx 0{,}944$), Dies rechtfertigt eine Beschreibung durch eine Exponentialfunktion mit dem Anfangswert 650 und dem Zerfallsfaktor **0,944**.

Auch für die Bundabstände $a(x)$ sind aufeinanderfolgende Werte annähernd quotientengleich mit fast dem gleichen Zerfallsfaktor 0,94 wie für $l(x)$, jedoch mit einer wesentlich größeren Messstreubreite.

Ergebnis:

Abstandsfunktion Bund-Steg: $l(x)=650\cdot 0{,}944^x$ Länge der schwingenden Saite

Abstandsfunktion Bund-Sattel: $k(x)=650-l(x)=650\cdot(1-0{,}944^x)$

Abstandsfunktion Bund-Bund: $a(x)=36{,}5\cdot 0{,}94^x$ s. *Aufgabe* Bundabstandsfunktion

3. Anwenden

Nun kann die Frage beantwortet werden, wie dicht die Bünde liegen würden, wenn man das Griffbrett in Richtung des Steges verlängern würde.
Es gilt z. B. $l(50)\approx 36{,}43$ $l(100)\approx 2.04$ $l(150)\approx 0{,}11$
Der 50-te Bund würde also 36,43*mm*, der 100-te 2.04*mm*, der 150-te 0,11*mm* usw. vom Steg entfernt liegen.
Wegen 0,944<1 ist $l(x)$ streng monoton fallend. Auf Grund des asymptotischen Verhaltens der Exponentialfunktion hat $l(x)$ den Grenzwert Null, wenn x gegen unendlich strebt. Übertragen auf die Gitarre bedeutet dies, dass der Abstand $l(x)$ zum Steg für eine hinreichend große Bundzahl x beliebig klein wird. Theoretisch gibt es also unendlich viel Bünde, die sich in der Nähe des Sattels unendlich dicht drängeln.

Aufgabe Bundabstandsfunktion

Die Abstandsfunktion Bund-Steg $l(x)=650\cdot 0{,}944^x$ ist eine Exponentialfunktion. Zeige, dass dann auch die Abstandsfunktion Bund-Bund $a(x)$ eine Exponentialfunktion ist.

Hinweis: Nutze die Beziehungen $a(x)=k(x+1)-k(x)$ und $k(x)+l(x)=650$.
Lösung:

$$a(x)=k(x+1)-k(x)=650-l(x+1)-(650-l(x))=l(x)-l(x+1)=650\cdot 0{,}944^x-650\cdot 0{,}944^{x+1}\approx 36{,}4\cdot 0{,}944^x$$

Aufgabe E-Gitarren

Die ersten E-Gitarren wurden von *Fender* mit einer Saitenlänge von 648 mm gebaut. Später stellte *Gibson* E-Gitarren mit einer Mensurlänge von 624 mm her. In einem Buch über E-Gitarren (Rössel 2000) werden die Abstände in *mm* der Bundstäbchen zum Sattel angegeben. Auszug:

Bund	1	2	3	4	5
Fender	36,3694	70,6976	103,0991	133,6821	162,5485
Gibson	35,0224	68,0792	99,2806	128,7309	156,5282

Vergleiche für beide Gitarre-Typen die Zerfallsfaktoren.
Wo befindet sich jeweils der 12., 24., 100. Bund?

Lösung: Es ergeben sich gleiche, sehr konstante Zerfallsfaktoren: 0,943874

Der zweite Weg (theoretisch-deduktiv)

In einem Buch über E-Gitarren (Rössel 2000) werden die Bundabstände in Millimeter auf vier Dezimalstellen genau angegeben (vgl. *Aufgabe* E-Gitarren). Es liegt nahe, dass diese Genauigkeit nicht durch Messen der Bundabstände von real existierenden Gitarren erzielt werden kann, auch nicht durch Übertragen von Tonabständen auf die Bundabstände durch ein noch so gutes Gehör eines Musikers. Den Werten muss eine Theorie zugrunde liegen.

Deshalb fragen wir die Physiker und die Musiker, was sie über das Thema wissen. Das passt gut, weil in der Physik der 10. Klasse die Akustik behandelt wird. Von den Musikern benötigen wir nur elementares Grundwissen.

Wir fragen nach dem Zusammenhang zwischen *Tonhöhe, Frequenz* und *Saitenlänge*.

Die elementaren Infos der Musiker und Physiker

Von den Musikern erfahren wir, dass die Bundabstände der Gitarre den Halbtonabständen entsprechen. Greift man jeweils einen Bund weiter in Richtung des Steges, so erhöht sich jeweils der Ton um einen Halbton. Bei der C-Dur-Tonleiter haben die Töne e und f, bzw. h und c halbe, die anderen ganze Tonabstände. Nimmt man die Zwischentöne zwischen den Tönen mit ganzem Tonabstand hinzu, so lässt sich ein Oktavabstand zwischen c und c' in 12 Halbtonschritte einteilen. Die 12 Töne einer Oktave ausgehend von c sind: c, cis, d, dis, e, f, fis, g, gis, a, ais, h, c'. Greift man am 12. Bund einer Gitarre, so ertönt also ein um eine Oktave (=12 Halbtonschritte) höherer Ton, am 24. Bund eine um 2 Oktaven höherer Ton, usw. als der Grundton.
Außerdem ist den Musikern qualitativ klar, dass das Verkürzen einer Saite einen höheren Ton erzeugt.

Musikinfo 1 Eine Oktave ist in 12 Halbtonschritte eingeteilt, was 12 Bünden bei der Gitarre entspricht.
Musikinfo 2 Je kürzer eine Saite, desto höher ein Ton.

Töne werden durch Schwingungen – hier von schwingenden Saiten – erzeugt. Was der Musiker als Tonhöhe empfindet ist für den Physiker als Frequenz, d.i. die Anzahl der Schwingungen pro Sekunde, messbar. Dies wird im Akustikunterricht mit dem Tonfrequenzgenerator demonstriert. Mit ihm können Töne unterschiedlicher Frequenz, d. h. auch unterschiedlicher Tonhöhe, erzeugt werden. Verdoppelt der Physiker jeweils die Frequenz eines Tones, so hört der Musiker einen um eine Oktave höheren Ton.

Physikinfo 1 Je größer die Frequenz, desto höher der Ton.
Verdoppelt man die Frequenz eines Tones, so erklingt ein um eine Oktave höherer Ton.

Untersucht der Physiker den Zusammenhang zwischen Frequenz (Tonhöhe) und Länge einer schwingenden Saite, so stellt er fest:

Physikinfo 2 Halbiert man eine Saite, so verdoppelt sich die Frequenz.
Drittelt man eine Saite, so verdreifacht sich die Frequenz.
Zwischen Saitenlänge und Frequenz besteht ein antiproportionaler Zusammenhang.
Die Längen zweier Saiten verhalten sich umgekehrt wie die Frequenzen der durch sie erzeugten Töne: $\frac{l_1}{l_2} = \frac{f_2}{f_1}$

Die ersten Folgerungen

Was haben die Infos nun mit einer Exponentialfunktion zu tun?
Das Physikinfo 1 gibt einen ersten Aufschluss. Einer additiven Erhöhung eines Tones um eine Oktave entspricht das Zunehmen der Frequenz mit jeweils dem selben Wachstumsfaktor 2.
Bei der Zuordnung *Anzahl der Oktavabstände n* $\rightarrow$ *Frequenz f(n)* handelt es sich also um eine Exponentialfunktion, nämlich:
$f(n) = f_o \cdot 2^n$, wobei f_o die Frequenz ist, von der man ausgeht.

Wie kann dies auf die Saitenlängen einer Gitarre übertragen werden? Um einen um eine Oktave höheren Ton zu erhalten, muss die Frequenz jeweils verdoppelt werden. Nach Physikinfo 2 erreicht man dies durch Halbierung der Saite. Einer (additiven) Erhöhung eines

Tones um eine Oktave entspricht das Abnehmen der Saitenlänge mit jeweils dem selben Zerfallsfaktor $\frac{1}{2}$.

Bei der Zuordnung *Anzahl der Oktavabstände n* $\rightarrow$ *Länge l(n)* handelt es sich also um eine Exponentialfunktion, nämlich:

$l(n) = l_o \cdot (\frac{1}{2})^n$, wobei l_o die Länge der nicht gekürzten Saite ist.

Einen um eine Oktave höheren Ton erhält man durch Halbieren der Saitenlänge: $l(1) = \frac{l_o}{2}$,

einen um zwei Oktaven höheren Ton erreicht man durch Vierteln der Saitenlänge: $l(2) = \frac{l_o}{4}$,

einen um drei Oktaven höheren Ton erreicht man durch Achteln der Saitenlänge: $l(3) = \frac{l_o}{8}$,

usw. Nach Musikinfo 1 ist das jeweils am 12. Bund, 24. Bund, 36. Bund, usw. Schon hier sieht man, dass sich die Oktavabstände und damit auch die Bundstäbchen in der Nähe des Steges unendlich dicht drängeln, was dem asymptotischen Verhalten der Funktion *l* entspricht.

Betrachtet man die Längen der angeschlagenen Saiten am 12., 24., 36., ... Bund, so erkennt man einen exponentiellen Zusammenhang.
Eine Frage bleibt jedoch:
Handelt es sich auch bei der Zuordnung *Bund x* $\rightarrow$ *Länge l(x)* um eine Exponentialfunktion?

Das entscheidende Info

Nach Physikinfo 1 erklingt bei einer Verdopplung der Frequenz ein um eine Oktave höherer Ton. Um zu diesem Ergebnis zu kommen, bedarf es jedoch nicht des Gehörs eines Musikers. Es handelt sich dabei nämlich um einen Naturton, dessen Frequenz vom Physiker gemessen werden kann. Schlägt man eine Saite an und tippt sie am 12. Bund kurz an ohne sie niederzudrücken, so hört man den lauteren Grundton nicht mehr, dafür aber den leiseren 1. Oberton, der eine Oktave höher erklingt, so, als würde man die Saite an dieser Stelle niederdrücken und anschlagen. Der Oktavton bzw. 1. Oberton ist also *natürlich* vorgegeben, weil er zugleich mit dem ertönenden Grundton mitklingt.
Der Grundton und der erste Oberton sind nicht die einzigen Naturtöne. Es gibt eine regelrechte Naturtonreihe. Lassen sich die Frequenzen der Naturtöne durch eine Exponentialfunktion beschreiben?
Leider nicht.
Leider – das hat sich auch Andreas Werckmeister im Jahre 1691 gedacht. Ist nämlich ein Musikstück in einer bestimmten Tonart komponiert, so lässt es sich bei Verwendung der Naturtonreihe nicht leicht in eine andere Tonart transponieren, etwa um sich einer Singstimme anzupassen. Deshalb hat er quasi *mathematisch gewaltsam* eine Oktave in 12 „gleichmäßige“ Frequenzabstände eingeteilt. So entstand die heute übliche *wohltemperierte Stimmung*, die vor allem durch das „Wohltemperierte Klavier“ von Johann Sebastian Bach bekannt geworden ist. Die dadurch entstandenen Töne befinden sich nur teilweise in der Nähe der Naturtöne. Bei der Einteilung hat sich Werckmeister an den Oktavabständen orientiert. So wie von einem Oktavton zum nächsten Oktavton die Frequenz jeweils mit dem selben Faktor 2 multipliziert wird, so sollte auch von einem Halbton zum nächsten Halbton die Frequenz mit dem selben Faktor multipliziert werden.

Mathematik-Info Andreas Werckmeister hat 1691 eine Oktave in 12 „gleichmäßige“ Frequenzabstände eingeteilt, indem er aufeinanderfolgenden Tonfrequenzen denselben Wachstumsfaktor zuordnete.

Die Schluss-Folgerung

Schreitet man von Halbton zu Halbton additiv fort, so wachsen die zugehörigen Frequenzen mit dem selben Wachstumsfaktor q. Zu einem Tonabstand von jeweils zwei Halbtonschritten ist der Wachstumsfaktor für die Frequenz q^2, zu einem Tonabstand von jeweils drei Halbtonschritten ist der Wachstumsfaktor q^3. Und schließlich ist der Wachstumsfaktor für 12 Halbtonschritten q^{12}. Dies entspricht einem Oktavabstand mit dem Wachstumsfaktor 2, weswegen gilt: $q^{12} = 2$ also: $q = \sqrt[12]{2}$

Bei der Zuordnung *Halbton x → Frequenz f(x)* handelt es sich also um eine Exponentialfunktion mit dem Wachstumsfaktor $q = \sqrt[12]{2}$. Wenn f_o die Frequenz eines Tones ist, so ist $f(x)$ die Frequenz des um x Halbtöne höheren Tons:

$$f(x) = f_o \cdot q^x$$

Übrigens, selbst für Musiklehrer, die sich sonst an nichts mehr aus ihrem Mathematikunterricht erinnern, ist die Zahl $\sqrt[12]{2}$ ein Begriff..

Dieses Ergebnis übertragen wir auf die Gitarrensaiten. Nach Physikinfo 2 verhalten sich die Längen zweier Gitarrensaiten umgekehrt wie die zugehörigen Frequenzen. Zur Berechnung des Zerfallsfaktors p betrachten das Verhältnis zweier Längen (Abstand Bund - Steg), die zu zwei aufeinanderfolgenden Bünden x und $x+1$ gehören:

$$p = \frac{l(x+1)}{l(x)} = \frac{f(x)}{f(x+1)} = \frac{1}{\frac{f(x+1)}{f(x)}} = \frac{1}{\sqrt[12]{2}}$$

Ergebnis:

Bei der Zuordnung *Bund x → Länge l(x)* handelt es sich um eine Exponentialfunktion mit dem Wachstumsfaktor $p = \frac{1}{\sqrt[12]{2}} = 0{,}943874...$

Wenn l_o die Länge einer Gitarrensaite ist, so ist $l(x)$ die verkürzte Länge der Saite, wenn sie am x-ten Bundstäbchen niedergedrückt wird:

Abstandsfunktion Bund-Steg:	$l(x) = l_o \cdot p^x$	Länge der schwingenden Saite
Abstandsfunktion Bund-Sattel:	$k(x) = l_o - l(x) = l_o \cdot (1 - p^x)$	
Abstandsfunktion Bund-Bund:	$a(x) = l_o \cdot (1-p) \cdot p^x$	s. *Aufgabe* Bundabstandsfunktion (allgemeine Version)

Aufgabe Selbstbau

Angenommen wir möchten ein Demonstrationsmonochord (ein Brett mit einer Saite) mit einer Saitenlänge von $l_o = 1m$ bauen. Wie muss man die Bundstäbchen über das Griffbrett verteilen?

(Falls du tatsächlich baust: ein eventueller Tonabnehmer sollte sich in der Nähe des Steges befinden.)

Aufgabe Bundabstandsfunktion (allgemeine Version)

Die Abstandsfunktion Bund-Steg $l(x) = l_o \cdot p^x$ ist eine Exponentialfunktion. Zeige, dass dann auch die Abstandsfunktion Bund-Bund $a(x)$ eine Exponentialfunktion ist.

Aufgabe reine Quinte

a) Ein Quintabstand besteht aus 7 Halbtonschritten. Der Kammerton a hat eine Frequenz von 440Hz. Berechne die Frequenz des eine Quinte höheren Tones e.
b) Nach der Naturtonreihe hat der um eine Quinte höhere Ton e die anderthalbfache Frequenz des Grundtons a. Die Quinte der wohltemperierten Stimmung aus a) weicht davon etwas ab. Berechne die prozentuale Abweichung.

Lösung: a) $f_e = 659{,}2551Hz$ b) Naturton: $f_e = 660Hz$, prozentuale Abweichung 0,1129%

Wegen der geringen Abweichung heißt diese Quinte „rein“. Außerdem ist die Quarte „rein“. Absolut rein sind die Prim und die Oktave.

Literatur

Frank Haunschild, Die neue Harmonielehre, Bd.1, AMA-Verlag 1988, S. 26 ff.
Fritz Rössel, E-Gitarren Background, AMA-Verlag 2000, S. 104 f.
Physik für Gymnasien, Länderausgabe D, Cornelson, S. 388-390

nroth@gmx.li