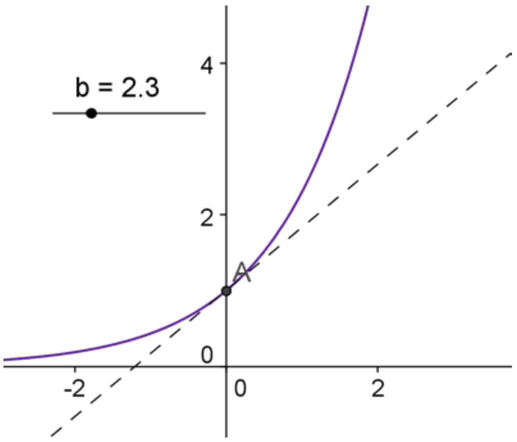
Mehr Mathematik

Analysis mit Geogebra: Einführung *der* Exponentialfunktion mit Schieberegler

Wie leitet man eigentlich eine Exponentialfunktion ab? Die Lösung dieses Problems ist nicht ganz einfach, da wir offensichtlich leider keine Ableitungsregeln heranziehen können. Wir nähern uns der Aufgabe zunächst mit den Hilfsmitteln, die uns Geogebra bietet, und konstruieren im ersten Schritt an den Graphen von f mit $f(x) = b^x, b > 0$ die Tangente in (0;1).

Schritt 1



Eine wunderbare Einrichtung in Geogebra ist die Möglichkeit, *Schieberegler* zu verwenden: Man benutzt sie, um Parameter zu variieren. Wir klicken *Schieberegler* an, legen durch einen Klick fest, wo der Regler im Bild stehen soll, und geben ihm den Namen b mit dem Intervall $2 \le b \le 3.1$ und der Schrittweite 0.0001, b wird zur Basis der betrachteten Exponentialfunktion.

Wir definieren also f mit *f(x)=b^2* in der Eingabezeile, schneiden den Graphen von f mit der y-Achse und legen in Schnittpunkt A mit dem Befehl *Tangenten* die Tangente an den Graphen von f in A. Die Tangente wird nun links im Fenster in der Form $y = m \cdot x + b$ angegeben (wenn nicht, klicken Sie auf $c = a\,x + b\,y$), und wir haben mit m die Steigung bzw. die Ableitung $f'(0)$.

Mit der linken Maustaste können wir b auf dem Schieberegler variieren, mit einem Rechtsklick öffnet sich ein Kasten, in dem wir die diesbezügliche *Animation* starten können.
Beobachten Sie die variierenden Tangentensteigungen.

Schritt 2

Wenn wir nun mit dem Differenzenquotienten exemplarisch die Ableitung von f mit $f(x) = b^x$ für die Basis b=2 an einer Stelle a ermitteln, werden wir mit ein paar Umformungen sehr schnell zu dem Punkt A, also zu der Stelle a=0 geführt, die wir in Schritt 1 schon mit Geogebra untersucht haben.

Wir formulieren dazu also für

$$f \;\; mit \;\; f(x) = 2^x,\; x \in \mathbb{R},$$

den Differenzenquotienten und erhalten an der Stelle a mit dem ersten Potenzgesetz

$$\frac{f(a+h) - f(x)}{h} = \frac{2^{a+h} - 2^a}{h} = \frac{2^a \cdot 2^h - 2^a}{h} = 2^a \cdot \frac{2^h - 1}{h}$$

Damit sind wir schon an einer sehr wichtigen Stelle angelangt. Der zweite Faktor in unserer Rechnung ist der Differenzenquotient von 2^x an der Stelle 0, denn es gilt

$$\ldots = 2^a \cdot \frac{2^h - 1}{h} = f(a)\frac{f(0+h) - f(0)}{h}, \quad f(0) = 2^0 = 1.$$

Da anschaulich klar ist, dass 2^x überall eine Tangente hat, also überall differenzierbar ist, also der Grenzwert des Differenzenquotienten existiert, bilden wir ihn und erhalten:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2^{a+h}-2^x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2^a\cdot 2^h-2^x}{h}=2^a\cdot\lim_{h\to 0}\frac{2^h-1}{h}$$
$$=f(a)\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}$$

Das können wir dann auch so schreiben: Für die Exponentialfunktion mit der Basis 2 gilt:

(1) $f'(a)=f(a)\cdot f'(0)$ für alle $a\in\mathbb{R}$.

Und das heißt: Wenn man die Ableitung an der Stelle 0 kennt, multipliziert man sie mit dem Funktionswert an der Stelle x und erhält die Ableitung an der Stelle a. Schön - eine tolle Einsicht.

Schritt 3

Wie bekommen wir aber die Ableitung von 2^x an der Stelle 0? Leider ist alles menschliche Tun Stückwerk, wir versuchen es also wenigstens ungefähr. Und das tun wir mit dem Taschenrechner, indem wir in

$$\frac{2^h-1}{h}$$

für h Werte einsetzen, die nahe bei 0 liegen: für h=0.000001 etwa erhalten wir

$$\frac{2^{0,000001}-1}{0,000001}=0,6931474,$$

somit gilt:

$f'(x)\approx 2^x\cdot 0.6931474$ für $f(x)=2^x$. Der (schlechtere) Näherungswert 0,69 lässt sich natürlich auch mit Geogebra für b=2 beobachten, vgl. Schritt 1.

Analoge Überlegungen lassen sich für alle Exponentialfunktionen anstellen, wie man sofort sieht. Zudem könnte man die Ergebnisse natürlich auch noch verbessern.

Schritt 4

Es drängt sich an dieser Stelle der Überlegungen ein Gedanke auf, der wirklich naheliegend ist: Wir wählen in Schritt 2 nicht die Basis 2, sondern die Basis b so, dass sich als Tangentensteigung in (0;1) der Wert m=1 ergibt, dass also für dieses b

$$\lim_{h\to 0}\frac{b^h-1}{h}=1$$

gilt.

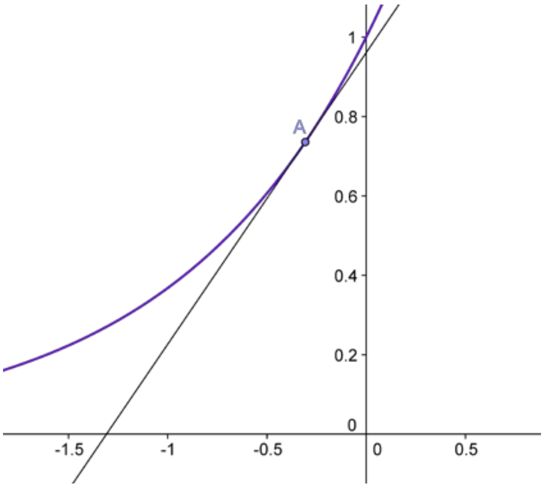
Für diese spezielle Basis verwendet man in der Mathematik nach Leonhard Euler den Buchstaben e.

Die Eulersche Zahl e ist also (für uns) dadurch definiert, dass für sie

$$\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}=1$$

gilt.

Zwecks Näherung setzen wir für kleines h so an:



$\frac{e^h - 1}{h} \approx 1$, d. h. $e^h \approx 1 + h$,

oder wenn wir $h = \frac{1}{n}$ mit großem $n \in \mathbb{N}$ setzen,

$e^{\frac{1}{n}} \approx 1 + \frac{1}{n}$, bzw. $e \approx \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

Man kann zeigen, dass genauer tatsächlich gilt

$\lim\limits_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$.

Die Konsequenz aus unseren ganzen Überlegungen ist also:

Die Funktion f mit $f(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$, hat sich selbst als Ableitung, es gilt $\left(e^x\right)' = \left(e^x\right)$. Und das sei hier noch angemerkt - die e-Funktion ist eine der ganz großen Funktionen der Mathematik.

Schritt 5

Zurück zu Geogebra: Geben Sie mit f(x)= e^x die Exponentialfunktion ein, wählen Sie einen Punkt A auf dem Graphen und konstruieren Sie in diesem Punkt eine Tangente an f. Variieren Sie nun A und beobachten Sie die Steigung der Tangente und den y-Wert von A.

(nev)