Mehr Mathematik

Wozu ist die Exponentialreihe gut?

Wir haben bekanntlich in dem letzten Beitrag zu Mehr Mathematik *die Exponentialreihe, also die Reihen- sprich Summendarstellung der Funktion f mit* $f(x)=e^x, x\in IR$, *hergeleitet. Wir erhielten*

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$$

Sie erinnern sich, dass wir unsere Darstellung bescheidenerweise nur für ein kleines Intervall gefunden haben. Wenn man aber mehr Mathematik investiert, findet man, dass diese Darstellung für alle $x\in IR$ *gilt. Das ist - ohne Übertreibung gesagt - eines der großen Ergebnisse der Mathematik.*

Wozu ist nun diese Reihendarstellung gut? Es gibt sehr viele Bereiche, in denen die exp-Reihe gute Dienste leistet; wir beschränken uns auf den Aspekt der Approximation.

1. Man kann mit der Reihe die Eulersche Zahl e beliebig genau berechnen, wenn man nur mit den Grundrechnungsverfahren plus, minus, mal und geteilt vertraut ist. Wir setzen x=1, nehmen etwa m=5 Summanden und erhalten

$$e^x\approx\sum_{n=0}^{5}\frac{x^n}{n!}.$$

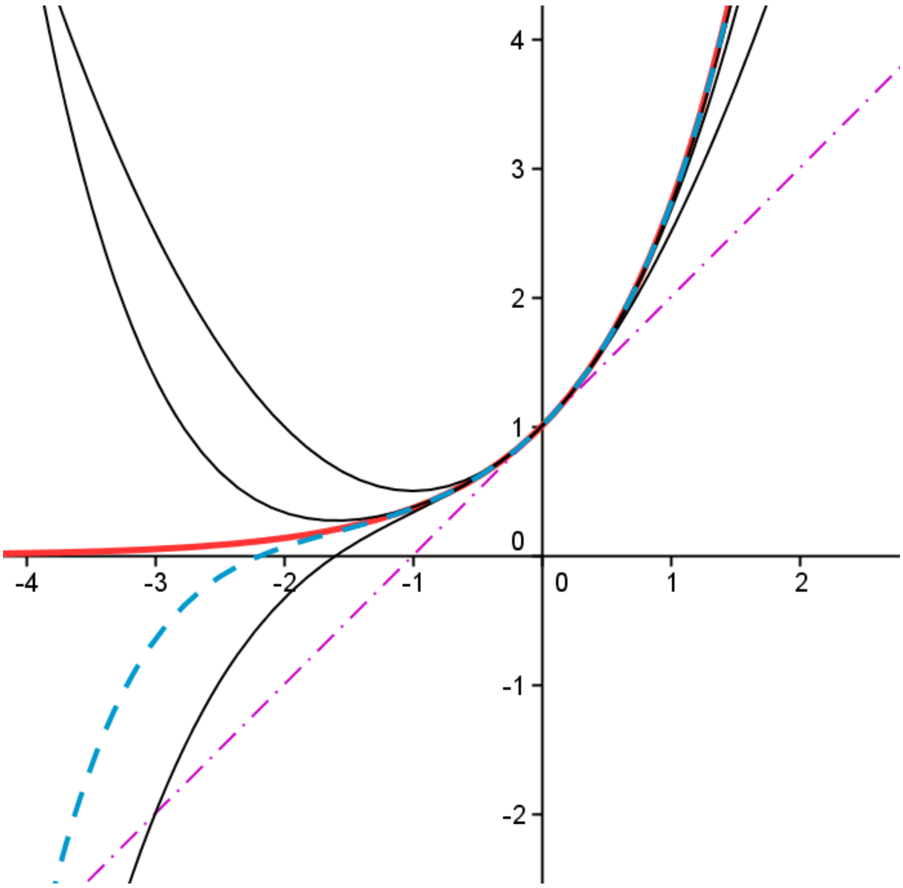
$$e^1\approx 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{24}+\frac{1}{120}$$

Das macht dann $e\approx 2,716666666593$. Größere Genauigkeit erhält man mit mehr Summanden.

2. Aber man muss zur Approximation nicht unbedingt x fest wählen: Wir können mit dem Abbruch der Reihe auch die Funktion approximieren. Dazu gehen wir dann wieder mit m=5 von

$$e^x\approx 1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{24}x^4+\frac{1}{120}x^5$$

aus und stellen die rechte und die linke Seite etwa mit Geogebra dar:



Die Zeichnung ist es wert, dass man sich in sie hineindenkt: Die exp-Funktion ist der dick gezeichnete Graph, der blau gestrichelte Graph ist das Polynom 5. Grades, und Sie dürfen raten, wo die Tangente im Punkt (0,1) algebraisch und in der Graphik zu finden ist. Welche Graphen sind dann noch dargestellt? Experimentieren Sie mit Geogebra, und Sie finden zu einem ganz neuen Mathematikgefühl. Man sieht hier deutlich, wie die Exp-Funktion von den Polynomen approximiert wird.
Da nun Polynome, also endliche Summen, einfacher sind als (unendliche) Reihen, lassen sie sich als Ersatz für die Exp-Funktion oft auch einfacher in Problemen handhaben. Wenn Sie übrigens den Gedanken wesentlich weiter verfolgen wollen, ist hier das zentrale Suchwort: der Taylorsche Lehrsatz.

(nev)