Auf Biegen und Schieben

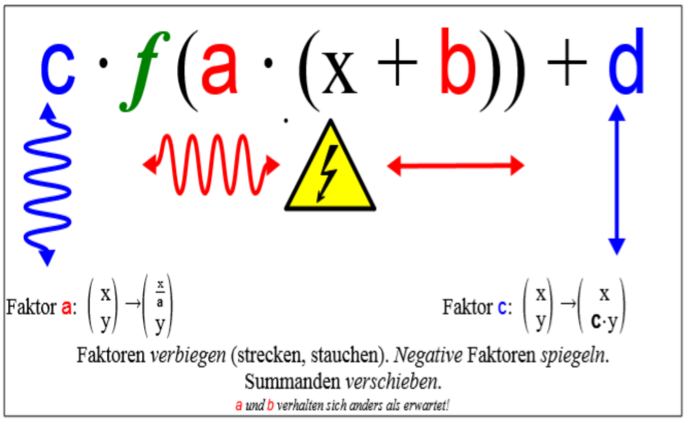
Modifikationen von Graphen durch Faktoren und Summanden

Der Kernlehrplans für die Sekundarstufe II an Gymnasien und Gesamtschulen in NRW erwartet bis zum Ende der Einführungsphase von den Schülerinnen und Schülern unter anderem die Kompetenz, einfache Transformationen (Streckung, Verschiebung) auf Funktionen (Sinusfunktion, quadratische Funktionen, Potenzfunktionen, Exponentialfunktionen) anwenden und die zugehörigen Parameter deuten zu können. Im Folgenden wird der Zugang über die Sinusfunktion explizit vorgestellt.

Ausgangspunkt für die folgenden Betrachtungen ist eine bestimmte reelle Funktion f, die durch Hinzufügen von Summanden b und d bzw. Faktoren a und c auf die Form $c \cdot f(a \cdot (x + b)) + d$ gebracht wird. Die Wahl der Bezeichnungen a, b, c und d legt die Reihenfolge der Bearbeitung fest, falls man von einem vorliegenden Funktionsterm ausgehend den zugehörigen Graphen entwickeln möchte. Die farbliche Differenzierung soll auf die Achsen verweisen, entlang derer sich die Veränderungen abspielen. Rote Kennzeichnungen beziehen sich auf die x-Achse, blaue auf die y-Achse. Insgesamt lassen sich die Veränderungen des ursprünglichen Graphen f in sehr komprimierter Form mithilfe des unten notierten Modifikationsschemas für Graphen (vgl. Seite 2) verdeutlichen. Wie wir später noch im Detail sehen werden, symbolisieren die „glatten“ Pfeile Verschiebungen, während die „geschlängelten“ Pfeile auf Verbiegungen des Graphen hinweisen. Entsprechend der Richtung der Pfeile geschieht die jeweilige Modifikation entweder parallel zur x- oder zur yAchse. Die Verschiebungen erweisen sich als sehr überschaubar, da hierbei der Graph selbst – außer bzgl. seiner Position im Koordinatensystem – nicht verändert wird[1]. Zu beachten ist lediglich die Tatsache, dass z. B. ein positiver Summand der Form b nicht – wie eventuell vordergründig vermutet – nach rechts verschiebt, sondern den Graphen parallel zur x-Achse nach links bewegt. Hierauf soll unter anderem das „Blitzsymbol“ hinweisen, welches allerdings gleichzeitig vor voreiligen Schlüssen beim Faktor a warnen möchte. Während positive Faktoren größer als 1 ansonsten ein Produkt vergrößern, verhält sich der Faktor a – ebenso wie der Summand b – anders als erwartet. Dabei modifiziert der Faktor a die x-Komponente sämtlicher Graphenpunkte, indem diese jeweils durch a dividiert wird. So entpuppt sich z. B. eine zunächst vermutete Stauchung tatsächlich schließlich als eine Streckung des Graphen und umgekehrt. Für Verbiegungen parallel zur y-Achse ist Faktor c zuständig. Ebenso wie bei der durch den Summanden d induzierten Verschiebung parallel zur y-Achse verläuft hier alles wie erwartet. Somit muss, um die Erläuterungen zum Modifikationsschema abzuschließen, nur noch auf das „Problem“ negativer Faktoren hingewiesen werden. Diese produzieren generell nichts anderes als eine Spiegelung des Graphen und zwar parallel zu der jeweils angesprochenen Achse. Dies bedeutet im Detail, dass ein negativer Faktor a neben seiner verbiegenden Wirkung den Graphen zusätzlich parallel zur x-Achse spiegelt, während ein negativer Faktor c dasselbe parallel zur y-Achse leistet. Dabei ist natürlich klar, dass sich z. B. hinter einer „Spiegelung parallel zur x-Achse“ de facto eine „Spiegelung an der y-Achse“ verbirgt[2].

[1] Selbstverständlich lassen sich die Verschiebungen, ebenso wie die Verbiegungen, durch Koordinatentransformationen erklären. Sofern man diesen Ansatz wählt, ändert sich der Graph selbst nicht. Stattdessen modifizieren wir die Skalierung entsprechend den Vorgaben.

[2] Trotzdem ist die Sprechweise „Spiegelung parallel zu einer Achse“ hier nützlich, da dadurch im Kontext der übrigen Veränderungen bzw. im Sinne des Modifikationsschemas argumentiert werden kann.



Schauen wir uns im Folgenden als Beispiel verschiedene Modifikationen der Sinus-Funktion f (x):= sin(x) (vgl. Abbildung 1) an.

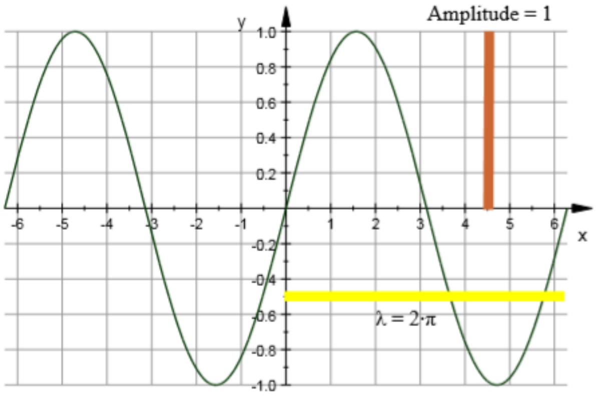


Abbildung 1: originale Sinus-Funktion (ohne Modifikationen)

Bei den trigonometrischen Funktionen, zu denen auch die Sinus-Funktion gehört, spielen die Begriffe „Amplitude“ und „Wellenlänge“ eine wichtige Rolle. Wir messen die Wellen- bzw. Periodenlänge λ parallel zur x-Achse. In Abbildung 1 wird sie durch die gelbe Strecke der Länge $2 \cdot \pi$ dargestellt. Die Amplitude liefert die maximale Höhe (den maximalen Ausschlag) der Welle und wird demnach parallel zur y-Achse ermittelt. In *Abbildung 1* beträgt die Amplitude offenbar 1.

Das Modifikationsschema c · f (a · (x + b)) + d

liefert somit die Amplitude direkt über den Ansatz Amplitude: = |c|.

Für die Bestimmung der Wellenlänge ist dagegen noch eine kleine Zwischenrechnung notwendig. Analog zum sonstigen Wirken des Faktors a findet man die durch a modifizierte neue Wellenlänge nach der Formel:

$$\text{Wellenlänge} = \frac{2 \cdot \pi}{a} \text{ bzw. } \lambda = \frac{2 \cdot \pi}{a}$$

Betrachten wir nun die Funktion $f(x) := \sin\left(\frac{\pi}{4} \cdot x\right)$

d. h. starten wir mit $a := \frac{\pi}{4}$.

Nach oben aufgeführter Formel findet sich die neue Wellenlänge mit λ = 8, was zum Graphen in *Abbildung 2* führt, der aus dem ursprünglichen durch eine Streckung parallel zur x-Achse hervorgeht. Das erkennt man allerdings nicht nur daran, dass der Faktor a kleiner als 1 ist, sondern zusätzlich auch an der sich daraus ergebenden größeren Wellenlänge[3].

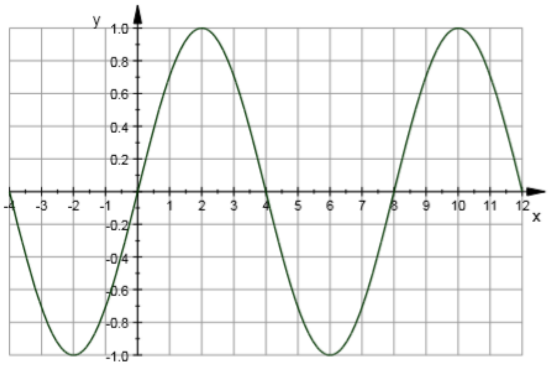


Abbildung 2: Modifikation a, Graph parallel zur x-Achse gestreckt, Wellenlänge = 8

Im nächsten Schritt verändern wir das Vorzeichen[4] von a auf –a, was eine Spiegelung parallel zur y-Achse liefert :

$$f(x) := \sin\left(-\frac{\pi}{4} \cdot x\right) \quad \text{(vgl. } \textit{Abbildung 3}\text{)}$$

Nun verschieben wir den gespiegelten Graphen um 3 nach links. Hierzu bringen wir den Summanden b: = +3 ins Spiel, wodurch „eigentlich“ eine Verschiebung nach rechts erwartet wird. Das gelbe Warnschild weist jedoch darauf hin, dass es stattdessen nach links geht (vgl. *Abbildung 4*). Wir

[3] Faktor a verhält sich anders als erwartet. Weil er zwischen Null und Eins liegt, führt er deshalb zu einer Streckung.
[4] Die Notation von a und –a dient hier dazu, den Entwicklungsprozess der Modifikationen zu beschreiben.
Außerhalb dieses Kontextes wird die Modifikation a ansonsten – unabhängig vom Vorzeichen dieses Faktors – natürlich stets nur mit a bezeichnet.

markieren diese Verschiebung zusätzlich mithilfe einer rot gestrichelten Parallelen zur y-Achse durch den Punkt x = 3, um die Übersichtlichkeit der Darstellung zu verbessern.

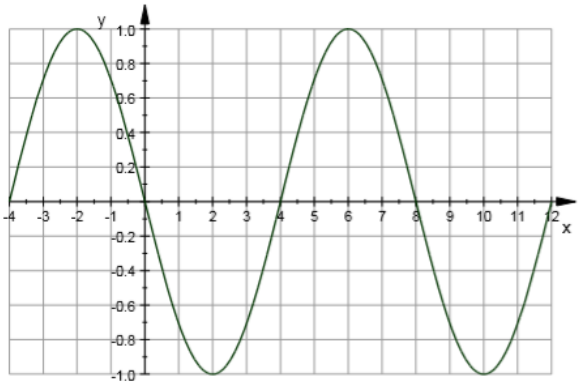


Abbildung 3: Modifikation –a, Graph parallel zur x-Achse gespiegelt

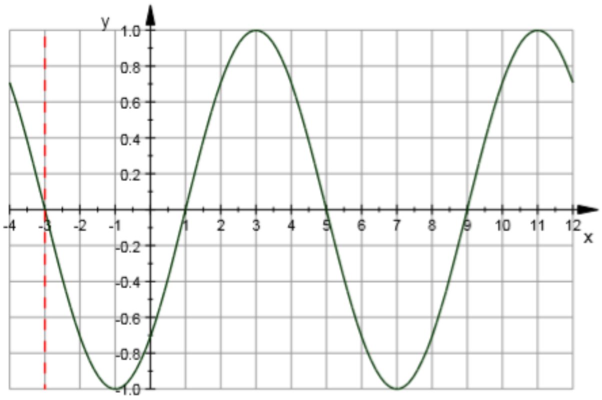


Abbildung 4: Modifikation b, Graph parallel zur x-Achse nach links verschoben

Für *Abbildung 4* lautet demnach der Funktionsterm:

$$f(x) := \sin\left(-\frac{\pi}{4}\cdot(x+3)\right)$$

Damit sind sämtliche Modifikationen parallel zur x-Achse abgeschlossen. Da die beiden restlichen Modifikationen, die sich nun parallel zur y-Achse abspielen, durchgehend „den Erwartungen entsprechen“, gestalten sich die weiteren Arbeiten weniger aufwändig. Als Modifikation c wählen wir den Faktor 2, also c: = 2, das heißt:

$$f(x) := 2\cdot\sin\left(-\frac{\pi}{4}\cdot(x+3)\right),$$ womit sich die Amplitude auf 2 erhöht.

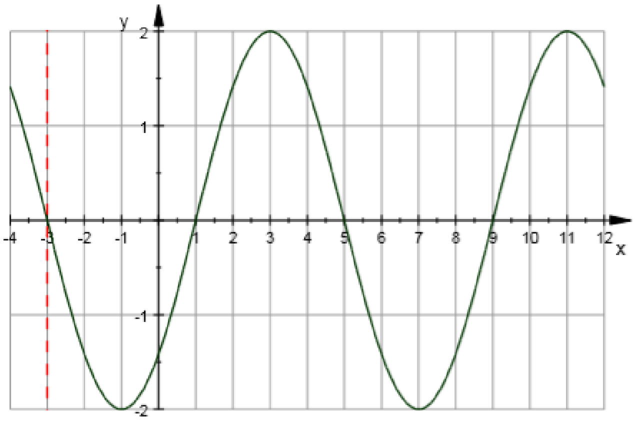


Abbildung 5: Modifikation c, Graph parallel zur y-Achse gestreckt, Amplitude=2

Mit der Modifikation –c schließen wir die Verbiegungen parallel zur y-Achse durch eine Spiegelung parallel zur y-Achse ab:

$$f(x) := -2\cdot\sin\left(-\frac{\pi}{4}\cdot(x+3)\right)$$

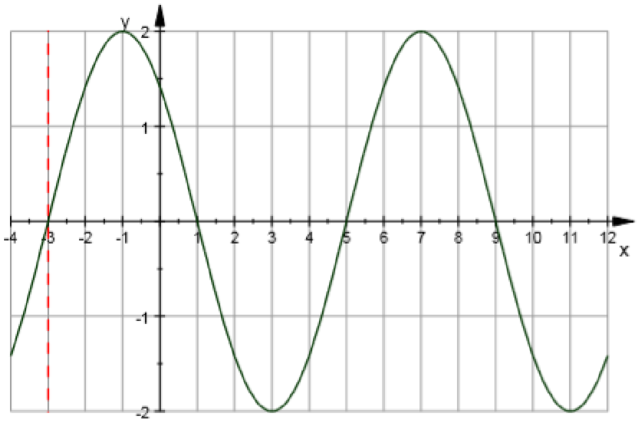


Abbildung 6: Modifikation –c, Graph parallel zur y-Achse gespiegelt

Was noch fehlt, ist die Verschiebung d parallel zur y-Achse. Wir wählen d:= 1 und erhalten:

$$f(x) := -2\cdot\sin\left(-\frac{\pi}{4}\cdot(x+3)\right)+1$$

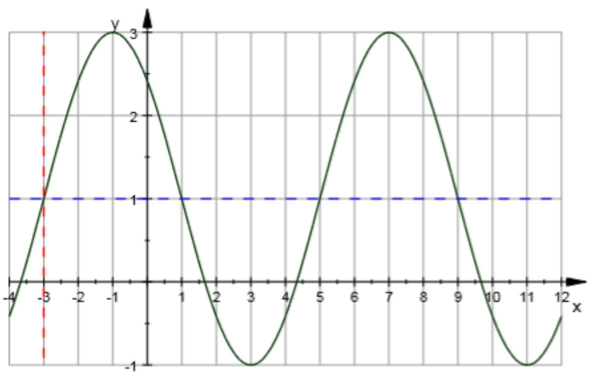


Abbildung 7: Modifikation d, Graph parallel zur y-Achse nach oben verschoben

Auch hier markieren wir diese Verschiebung zusätzlich durch eine gestrichelte Parallele, nun aber zur x-Achse, in blau und durch den Punkt y=1.

Um das Vorgehen im Einzelnen insgesamt transparenter zu machen, listen wir erneut alle Schritte ohne Kommentar und ohne Veränderung des ursprünglich gegebenen Koordinatensystems auf. Außerdem sind dabei die Maßstäbe für die Einheiten auf beiden Achsen durchgehend identisch.

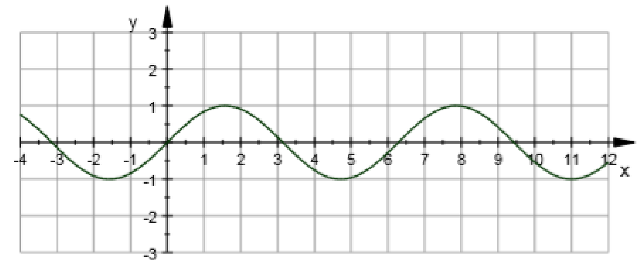


Abbildung 8: originale Sinus-Funktion (ohne Modifikationen), Wellenlänge = 2π

$f(x) := \sin(x)$

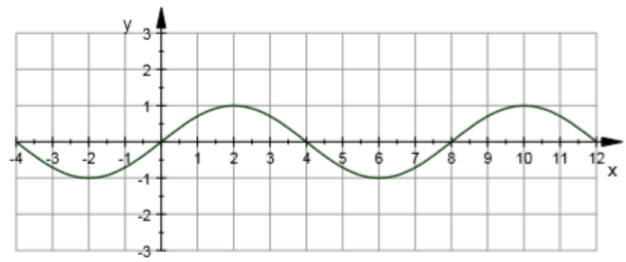


Abbildung 9: Modifikation a, Graph parallel zur x-Achse gestreckt, Wellenlänge = 8

$f(x) := \sin\left(\frac{\pi}{4}\cdot x\right)$ Das heißt: $a: = \frac{\pi}{4}$ und $\lambda = \frac{2\cdot\pi}{a} = \frac{2\cdot\pi\cdot 4}{\pi} = 8$

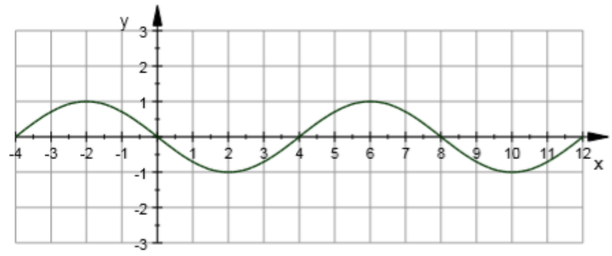


Abbildung 10: Modifikation –a, Graph parallel zur x-Achse gespiegelt

$f(x) := \sin\left(-\frac{\pi}{4}\cdot x\right)$

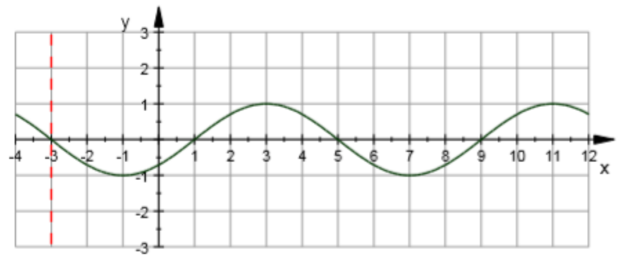


Abbildung 11: Modifikation b, Graph parallel zur x-Achse nach links verschoben

$f(x) := \sin\left(-\frac{\pi}{4}\cdot(x+3)\right)$

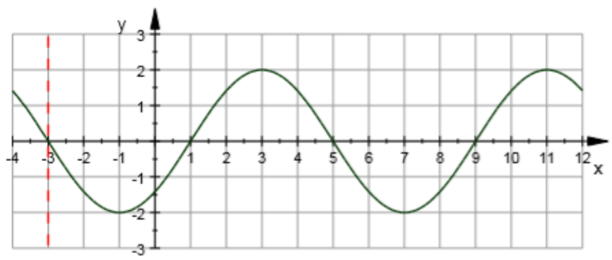


Abbildung 12: Modifikation c, Graph parallel zur y-Achse gestreckt, Amplitude=2

$f(x) := 2\cdot\sin\left(-\frac{\pi}{4}\cdot(x+3)\right)$ Das heißt, die Amplitude erhöht sich auf 2.

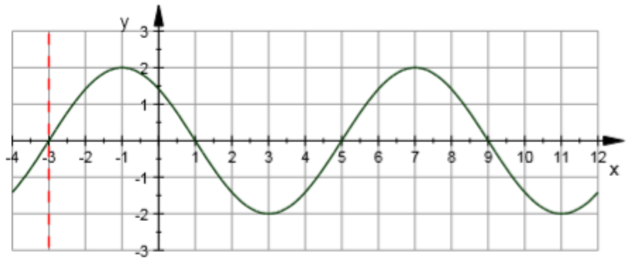


Abbildung 13: Modifikation –c, Graph parallel zur y-Achse gespiegelt

$$f(x) := -2 \cdot \sin\left(-\frac{\pi}{4} \cdot (x+3)\right)$$

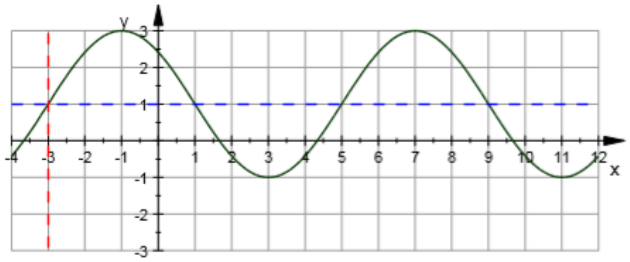


Abbildung 14: Modifikation d, Graph parallel zur y-Achse nach oben verschoben

$$f(x) := -2 \cdot \sin\left(-\frac{\pi}{4} \cdot (x+3)\right) + 1$$

(von Rolf Mantyk, leicht angepasst)